DELEGATION GENERALE POUR L'ARMEMENT

1979

CONCOURS POUR LE RECRUTEMENT
D'INGENIEURS DES ETUDES ET TECHNIQUES D'ARMEMENT

MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

1ère EPREUVE

On considère l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle x définies pour tout x .

On note :

C_o la classe des fonctions continues pour tout x

C_1 la classe des fonctions admettant une dérivée continue pour tout x

C_2 " " une dérivée seconde continue pour tout x

. . . . . .

C_n la classe des fonctions admettant une dérivée d'ordre n continue pour tout x

Dans les questions 1, 2, 3, 4, 5, 6, r et s sont des réels non nuls indépendants de x

(1) On appelle ϕ_r l'application qui, à toute fonction f de C_1, associe ϕ_r of définie par :

(1) $(\phi_r o f)(x) = \phi_r[f(x)] = f'(x) - r\, f(x)$

a) Montrer que ϕ_r est une application linéaire de C_1 dans C_o

b) Trouver le noyau de ϕ_r .

(2) On appelle ϕ_s l'application qui, à toute fonction f de C_1, associe ϕ_s of définie par :

$(\phi_s o f)(x) = f'(x) - s\, f(x)$

a) Montrer que l'application composée $\phi_r \circ \phi_s$ définie sur C_2 est une application linéaire de C_2 dans C_o

b) Trouver le noyau de $\phi_r \circ \phi_s$ dans les deux cas : $r \neq s$, $r = s$

c) Montrer que $\phi_r \circ \phi_s = \phi_s \circ \phi_r$

(3) u désigne une constante réelle, et ce jusqu'à la fin du problème.

On appelle ψ_r l'application qui, à toute fonction f de C_o, associe $\psi_r \circ f$ définie par :

(2) $(\psi_r \circ f)(x) = \psi_r[f(x)] = e^{rx} \int_u^x e^{-rt} f(t)\, dt$

a) Montrer que ψ_r est une application linéaire de C_o dans C_1 .

b) Quel est le noyau de ψ_r ?

c) Montrer que si $f \in C_1$ et $f(u) = 0$ on a :

$(\psi_r \circ f)' = \psi_r \circ f'$

d) λ désignant une constante réelle non nulle, existe-t-il des fonctions de C_1 autres que la fonction nulle qui vérifient :

$\psi_r \circ f = \lambda f$?

(4) Etudier les applications composées

$\phi_r \circ \psi_r$ et $\psi_r \circ \phi_r$.

(5) Soit h une fonction continue des variables t et v. Justifier la formule :

(3) $\int_u^x \int_u^t h(t, v)\, dv\, dt = \int_u^x \int_v^x h(t, v)\, dt\, dv$

en identifiant les domaines d'intégration.

On appelle ψ_s l'application qui, à toute fonction f de C_o, associe $\psi_s \circ f$ définie par :

$(\psi_s \circ f)(x) = e^{sx} \int_u^x e^{-st} f(t)\, dt$

.../...

E.N.S.I.E.T.A.

a) En utilisant la formule *(3)*, montrer que si $r \neq s$,

$$\psi_s \circ \psi_r = \frac{\psi_r - \psi_s}{r - s}$$

en déduire que : $\psi_s \circ \psi_r = \psi_r \circ \psi_s$

(6) On considère l'équation différentielle à coefficients constants

(4) $y'' + a\,y' + b\,y = f(x)$

avec $f \in C_0$ $\qquad b \neq 0$

On suppose que les racines r et s de l'équation

(5) $X^2 + a\,X + b = 0$

sont réelles et distinctes.

Montrer que les solutions de *(4)* qui prennent la valeur zéro pour $x = u$ sont données par la formule :

(6) $\left(\frac{\psi_r - \psi_s}{r-s} \circ f\right)(x) + k\left[e^r(x-u) - e^s(x-u)\right]$

où k est une constante réelle.

(7) On suppose dans cette question que r et s sont deux complexes conjugués différents. La formule *(2)* définit alors une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$

a) Montrer que $\frac{\psi_r - \psi_s}{r-s} \circ f$ définit une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et que cette application admet des dérivées première et seconde.

b) On reprend l'équation différentielle *(4)* dans le cas où les racines r et s de l'équation *(5)* sont complexes conjuguées.
Vérifier que $\frac{\psi_r - \psi_s}{r-s} \circ f$ est une solution particulière de *(4)*

c) Démontrer que les solutions de *(4)* qui prennent la valeur zéro pour $x = u$ sont données par la formule *(6)* où k est une constante imaginaire pure.

(8) On donne l'équation différentielle :

(7) $y'' + 2\,y' + 2\,y = f(x)$

la fonction f est ainsi définie :

$$\begin{cases} x \leqslant 0 & f(x) = 0 \\ 0 \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi & f(x) = 1 - \cos x \\ x \geqslant (2k+1)\pi & f(x) = 2 \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}$$

a) Etablir l'existence d'une solution unique Y de *(7)* telle que

$Y(x) = 0$ pour $x \leqslant 0$

b) Préciser les déterminations de Y

c) A quelle classe C_n appartient cette fonction Y?

(9) Calcul numérique :

Trouver par la méthode des trapèzes une valeur approchée de

$(\psi_1 \circ f)(1)$

en prenant $u = 0$ et $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

On partagera le segment [0 1] en dix parties égales.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail